Solution 4 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.

• Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$ donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$;

• Soit $n \in \mathbf{N}$ Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2} > 0$.

Conclusion : $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.

2°/ $n \in \mathbf{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + 2} - u_n = \frac{u_n^2 + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + 2} + u_n} = \frac{2}{\sqrt{u_n^2 + 2} + u_n} > 0.$$

(Car $u_n > 0$). D'où la suite (u_n) est croissante.

3°/a) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_n^2 + 2) - u_n^2 = 2$ donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de 1er terme $v_0 = u_0^2 = 1$.

b) On a : $v_n = v_0 + n \cdot r = 1 + 2n$; $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1 + 2n}$

4°/ On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sqrt{1 + 2n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Conclusion : (u_n) n'est pas convergente.

Solution 5 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n < 3$.

• Pour $n = 1$, on a $u_1 < 3$ car $u_1 < \frac{5}{2}$.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $u_n < 3$ et montrons que $u_{n+1} < 3$.

$$u_{n+1} - 3 = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) - 3 = -\frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$$

Or $u_n < 3 \Rightarrow 3 - u_n > 0$ d'où $-\frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) < 0$ et par suite

$u_{n+1} - 3 < 0 \Rightarrow u_{n+1} < 3$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n < 3$.

2°/a) $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) - u_n = 3 - u_n - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$